Matematika: extra ismeretek Cambridge-hez

Williams Kada

November 21, 2018

Abstract

Megpróbálom összefoglalni, hogy miként térnek el a brit diákok matematikai előismeretei a magyarokétól, és útmutatást adni az esetleg hiányzó ismeretek és megfogalmazásbeli szokások elsajátításához. Mindez magánvéleményem (és évről évre finomodik), nem sok felelősséget vállalok érte. A beszédszerű stílus meg, remélem, segít élvezhetővé tenni az olvasást meg otthonosabbá tenni a felkészülést: "képzeld azt, hogy ott ülök melletted és magyarázok". Meg inkább vagyok pontatlan, mint hogy félrevezessek valakit, mert pontosnak akarok látszani. [1]

Ja és bátran lapozz bele abba, hogy mit tanulunk Cambridge matekon: jegyzetek és feladatok. Számos interjútapasztalat olvasható itt.[2]

1 Bevezetés

Úgy írok, hogy olyan olvasót tartok fejben, aki Cambridge matematika szakos interjúra, illetve majd STEP-vizsgára készül, de még bárkinek jó lehet, akinek a szakja a brit középiskolai matematikaoktatás emléklenyomatára alapozik. [3]

1.1 Kultúrsokk?

Ha például ránézel akár egy STEP-feladatsorra, már látható egy afféle éles módszeresség a feladatok stílusában. Ehhez az igen nehezen körülírható kulturális különbséghez talán a legnehezebb hozzászokni. A britek elvileg az egyetemen látnak először *bizonyítást* (ezt hallottam), cserébe magabiztosabbak a matematika alkalmazásaiban, különösen kalkulusban. Sokat lehet és érdemes még beszélni a brit és magyar oktatási és matematikaművelési kultúra közötti különbségekről, de jelen írásnak nem ez a célja.

1.2 Interjú cuccos

1.2.1 Saját interjúélményem

Én a Trinity College interjúiról tudok írni, mert oda jelentkeztem.

60 perc feladatsorírás, 30 vagy 45 perc szóbeli interjú két vizsgáztató előtt. (A vizsgáztatók kivétel nélkül nagyon okosak, értelmesek, és jóindulatúak.) A feladatsorírás közben írj papíron angolul megoldásvázlatokat: annyit kell viszonylag olvashatóan leírni, amennyiből világosan kiderül, hogy átgondoltad a megoldást és látsz benne minden buktatót. Ha bizonytalan vagy, hogy odaírd-e a hivatkozást vagy sem, írd oda (vagy írd oda, ha pl. integrálod a két oldalt). Ne spórolj a papírral: minél kevesebb számítást próbálj fejben meggondolni. Haladj tempósan, de nem eszeveszetten (van egy-két kellemetlen vagy nehéz feladat).

[1] Ha van további kérdésed vagy megjegyzésed, írj a williams.kada kukac gmail.com címre, és kiegészítem ezt az útmutatót.

[2] A matektudás mondjuk sokkal jobban javít esélyeiden, mint ha részletre pontosan ismered az interjúk menetét, szóval kár lenne, ha túl sok időt töltenél e honlapon.

[3] Haha. Én legalábbis szabadidőmben mindenféle írást elolvasok, ami véletlenszerűen szembejön: lehet, az olvasók 70%-a nem a célközönség lesz.

Az "interjún" egyik kérdező megnézte a megoldásaimat: minimálisat kellett hozzájuk magyaráznom. A másik kérdező eközben próbált segíteni, hogy megoldjam a kimaradt feladatokat. A tippem – és ez egyéb interjúkra is igaz –, hogy merj hangosan gondolkozni és merj buta dolgokat megvizsgálni vagy *ábrákat rajzolni*, ha éppen bizonytalan vagy (én pl. valami okból összekevertem a változót és a konstanst az egyik egyenletben: ebből pl. az segíthet ki, ha megállsz és megnézel egy speciális esetet). Trinitynél az értékelésnél úgy emlékszem (de nagy eséllyel rosszul), hogy a teszten megoldott példák száma, az interjú közben megoldott példák száma (akár segítséggel) és még minimálisan a gondolkodásmód/segítségre való reakció a fő szempont.

Ha valamihez készülés ellenére tényleg nem értesz, szabadon mondhatod, hogy nem tanultál róla és inkább kérnél másik feladatot. (Ha csak a jelölés nem világos, kérj magyarázatot.) Nem harapnak, sőt, a professzorok kifejezetten közvetlenek szoktak lenni!

1.2.2 Na de hogy készüljek?

A Trinity honlapján a három feladatsort csináld meg időre, lehetőleg miután végigmentél jelen írományomon. Ha még hiányérzeted van, segít még Stephen Siklos könyve, illetve a Google-ról összeszedett mindenféle Oxbridge-i interjúkérdések.

Az angol nyelvvel vagy az angol szaknyelvvel vagy a szóbeliséggel kapcsolatos problémákhoz... Nos, angol nyelvű szakszójegyzék van. Az nagyon jó lehet, ha néhányan összetalálkoztok (kizárólag) angolul beszélgetni interjúszerű feladatokról, esetleg ha Siklos-könyves feladattal mock interjút csináltok egymásnak. (Más beszélni, mint írni.) Ha pedig egyedül oldasz példát, próbálj angolul gondolkozni. De most csak dobálózom ötletekkel.

Ha nagyon izgulsz: ömm, mondhatnám, hogy a túlizgulás nem javít esélyeiden, de azzal nem segítettem, ugye? Végső soron te tudod saját tapasztalataid alapján, hogy miként tudsz megnyugodni. De esetleg képzelj el egy ilyen képet: bármilyen kérdésre össze tudod szedni a gondolataidat, majd elmondod azt, amit jónak érzel, és az nagyon is jó lesz. "És mi van, ha interjún lesz egy váratlan helyzet, és elrontom?" Mindegy, akkor is az a jó, amit mondasz, mert arra kíváncsiak. Meg úgy érdemes elképzelni, hogy interjúra készülés közben készíted elő azt, hogy miként fogsz gondolkozni interjú közben: nem interjú alatt fogod feltalálni a spanyolviaszt, akkor csak felmutatsz mintegy pillanatképet magadról. Ennek ellenére persze interjú alatt minden jelentkező valamennyire szokott izgulni; az adrenalin jót tesz, az idegesség nem.

1.3 STEP-re való készülés

A STEP-hez bevezető itt. STEP-készülés esetén előbb azt olvasd el, majd olvasd végig ezen írásomat.

A felkészüléshez nem szükséges brit a tanterv részletes ismerete 1.-től 13. osztályig. Ajánlom, hogy STEP előtt legalább futólag nézz bele az OCR advanced matek kurzusok tantervébe (a D1 és D2 modul irreleváns).

Továbbolvasás előtt szeretném, ha letöltenéd innen Stephen Siklos könyvét, és megnéznéd gyorsan a végén lévő Syllabus-t. Mi az ismeretlen? Mi az ismerős? Mi tűnik valami ismerősnek más köntösbe bújtatva? Utalni fogok a könyvre.

STEP-re én úgy készültem, hogy kb. 14 darab korábbi éves feladatsort végigcsináltam időre. Az is jó lehet, ha Siklos könyvét tolod (kihagyva azt, amiből nem tanulnál), csak utána nézve gyakorló feladatsort. Az utóbbi években szerintem sokat nehezedett a STEP, így régi sorokat önbizalomnövelésre és sikerélményre, új sorokat fejlődésre használj.

Fontos látni, hogy STEP-en és majd Cambridge-ben nem az a lényeg, hogy előbb-utóbb meg tudnád-e csinálni a feladatot, hanem hogy *letisztult technikával* és *fennakadás nélkül* magabiztosan meg tudd oldani. Tippem a vizsgázásra: próbáld gyakorlással és minden számítás gyors ellenőrzésével (előjel rendben? a bevetett képlet helyes?) kiküszöbölni, hogy hibázz: az visz el a legtöbb időt (és energiát!), ha benézel valamit. Akkor jönnek a számítási hibák, amikor gyorsítani akarsz és összevonsz lépéseket: csak szépen, nyugodtan, gépiesen, mint egy svájci óra.[4] Persze ha mégis benézed, szép nyugodtan keresd meg a hibát vagy kezdd újra.

A két vizsgán több pontot veszítettem úgy is, hogy bőven elegendő számú feladatot oldottam és pontosan magyaráztam: vagy számítasz arra, hogy 1 vagy 2 pontot levonnak teljes megoldásaidból szőrözés miatt, vagy pedig – és jobb mód szerintem nincs a pontlevonás kiküszöbölésére – megnézel korábbi javítási útmutatókat. (Még ezen az oldalon találtam kidolgozott megoldásokat: egy-kettőt megnyugtató lehet megnézni.)

2 Deriválás briteknek

2.1 Ez szerintem egy picit kultúrsokk

Kultúrsokk lehet olyan alakú egyenleteket látni, mint a $dy = \frac{dy}{dx}dx$. Ez csak egy számítási trükköt jelöl, azt, hogy bármilyen differenciálegyenletben az egyik oldal helyére a másik oldalt írhatod, vagy hogy mindkét oldalt integrálhatod: $y(a) - y(0) = $ "$\int dy$" $= \int_0^a y' dx$. Azért használatosak ezek a jelölések, mert így lehet a lehető leggyorsabban alkalmazott matematikát végezni.[5]

2.2 Deriválás magyaroknak, akik angol gyepre lépnek

Felteszem, ismered a határérték és a derivált fogalmát.

A differenciálszámítás alapgondolata, hogy ha közelről ránézek egy simán kinéző $y = f(x)$ függvénygrafikonra, egyenest látok. (Every smooth curve is locally a line.) Képlettel: ha δx nagyon kicsi[6], akkor

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\delta x.$$

Az $f'(x_0)$ derivált precíz definíciója helyett szemléltetés végett mondhatjuk azt, hogy

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}_{\delta x \to 0} = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0},$$

tehát az x_0 körül f-nek kis megváltozása az x megfelelő kis megváltozásával elosztva.

Ismeretes a láncszabály, ami dx, dy jelöléssel a következő (connected rates of change):[7]

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Megjegyzem: ennek a megfelelője vesszős jelöléssel $(y \circ x)'(t) = y'(x(t)) \cdot x'(t)$. Van tehát egy kis furcsaság a $\frac{dy}{dx}$ jelölésben: ott akkor *mi is a változó?* Ez a következő elképzeléssel válhat világossá.

2.3 A változók egymáshoz tartoznak

Képzeld el, hogy egy alkalmazott matematikus vagy, aki szeretne megérteni egy hűlő kazánt. Mondjuk mérni tudod az energiát, hőmérsékletet, nyomást: E, T, p. Mondjuk fel tudsz írni valami egyenletet, valami törvényt, mondjuk $\frac{dT}{dp} = E$. [8] Ez ugye kb. azt jelenti, hogy bármilyen pillanatban E-szer olyan mértékben változik T, mint p.

Mi szerint paraméterezünk? Egyetlen változó van, méghozzá az idő (t), ami egyre növekszik (lehet $t \in [0; 1]$, $t \in [0; \infty)$ stb.) Minden más függvény: az x, y, z mind olyan értékek, amik t-től függően változnak. Az egész rendszerünk mondjuk egy időben változó

$$\big(x(t), y(t), z(t), \dots\big)$$

[4] Ahogy egykori tesitanárom, Wirth tanár úr mondaná, "Nem kell a bravúr!"

[5] Például a Cambridge elsőéves Differential Equations kurzuson sok ilyen számítási trükk bizonyítására nagyjából utalnak. Olyasmi a hozzáállás, hogy azokat a dolgokat szabad megcsinálni, amiket nagyjából meg tudnál indokolni, és idővel megtapasztalod, hogy mik a reálisan fellépő hibalehetőségek.

[6] fizikusok sokszor Δx-et írnak ekkor, de Cambridge-ben egy pici perturbációt δx jelöl

[7] Szabad dx-szel egyszerűsíteni, de d-vel tilos.

[8] Kérlek, rugaszkodj el a kedvemért attól a gondtól, hogy nem stimmelnek a mértékegységek!

szám-n-es segítségével írható le.[9] Ekkor úgy érdemes elképzelni, hogy adott t_0 helyen

$$\frac{dy}{dx} := \frac{y(t_0+\delta t)-y(t_0)}{x(t_0+\delta t)-x(t_0)}_{\delta t\to 0},$$

és akkor természetessé válik olyan dolgokat írkálni, mint $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$.

OK. De tekinthetnénk inkább x-et változónak? Hogyne, persze csak akkor, ha az $x(t)$ függvénynek van inverze. Ekkor pedig az y, z stb. függvények matematikai szempontból mind megváltoznak: $y(t)$ helyett az $y(t(x))$ függvényt látjuk, ahol $t(x)$ az eredeti $x(t)$ függvény inverzét jelöli. Szemléletileg viszont semmi sem változik meg: folyamatosan változó és egy adott pillanatban megvizsgálható mennyiségeket képzelünk el, ahol a pillanatokat ezúttal x szerint paraméterezzük.

Továbbá Newton jelölése: azt, hogy az $x(t)$ miként változik az *idő* szerint (csak az idő függvényeinél használatos ez a jelölés), $\dot{x}(t)$ jelöli:

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0+dt)-x(t_0)}{dt}_{dt\to 0} = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

3 Még több deriválás

Eddig t szerint paraméterezett f, g, x, y, z kifejezésekről beszéltünk. Hozzárendeltük az f függvényhez a $\frac{df}{dt}$ függvényt. Gondolhatunk így a deriválásra, mint egy $C^\infty \to C^\infty$ hozzárendelés, ahol C^∞ jelöli az akárhányszor deriválható függvények halmazát, adott intervallumon.

Ily módon $\frac{d}{dt}$ egy ún. operátor: az f függvényhez a „$\frac{d}{dt}f$" $= \frac{df}{dt}$ függvényt rendeli. Vannak tulajdonságai, például *lineáris*, vagyis A, B konstansokra

$$\frac{d}{dt}(Af+Bg) = A\frac{df}{dt} + B\frac{dg}{dt}.$$

Lehet sokszor ismételni $\frac{d}{dt}$ alkalmazását: az $f(t)$ n-szeri deriváltját így $\frac{d^n f}{dt^n}$ jelöli. Lehet továbbá beszélni sokféle operátorról, mint például:

- $t\frac{d}{dt}$ (melyre $f \mapsto tf'$),
- t (melyre $f \mapsto tf$ és *nem* $f \mapsto t$),
- $(\sin t)\frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}$ (melyre $f \mapsto (\sin t)f' + f''$).

Ebben a mágia akkor látszik meg, mikor ezeket a lineáris operátorokat egymás után alkalmazzuk (figyelni kell viszont: operátorokra általában $T\circ U \neq U \circ T$):

$$\left(t+\frac{d}{dt}\right)^2 = t^2 + t\frac{d}{dt} + \frac{d}{dt}t + \frac{d^2}{dt^2} = (t^2+1) + 2t\frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}.$$

(Tehát a bal oldal a $t+\frac{d}{dt}$: $f \mapsto tf + \frac{df}{dt}$ lineáris operátor kétszeri alkalmazása.)

Mindezt ilyen részletességgel egyáltalán nem kell tudni, csak elmondtam, mert jobb úgy dolgozni, ha tudom, mi az, hogy operátor és hogy honnan jön a $\frac{d^n}{dx^n}$ jelölés. Meg ettől még menőbb lesz majd a vektorkalkulus és a kvantummechanika.

[9] Vagy pl. a kvantummechanikában, ami Cambridge-ben másodéves tárgy, ehelyett egy időben változó $\Psi(x,t)$ (adott t-re $\psi(x)$) komplex értékű hullámfüggvény ír le egy rendszert, amit méréseinkben úgy észlelünk, hogy részecskének helyének valószínűség-eloszlásfüggvénye $|\psi(x)|^2$, így pl. egy dimenzióban $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2 = 1$ mert a részecske 1 valószínűséggel van valahol.

4 Sorfejtések

Ez talán csak STEP-hez kell, úgyhogy vázlatosan közlöm. Egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sorról lenne szó. De ez mit jelent?

Bizonyos x valós számokra az a_0, $a_0 + a_1 x$, …, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, … sorozat konvergens: ezek a T konvergenciatartomány elemei. Könnyen észre lehet venni, hogy ha x-re konvergál, akkor $\lambda \in (-1, 1)$ esetén λx-re is konvergál. Szóval T lehet $(-\infty, \infty)$ a konvergenciatartomány, vagy $\{0\}$, vagy egyéb esetben $R = \sup_{x\in T} |x|$ mellett $(-R, R)$ vagy $[-R, R)$ vagy $(-R, R]$ vagy $[-R, R]$.

Van ágyú-képlet is: $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$. (A limsup a konvergens részsorozatok legnagyobb határértéke, azaz $\lim_{N\to\infty} \sup_{n\leq N} x_n$; ezt is be lehet látni.)[10]

A Taylor-sorfejtés az a felvetés, hogy

$$f(x) =^? f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots.$$

Ha rigorous vagy, megértheted, egy ilyen egyenlőség hogyan bizonyítható itt, bár inkább ajánlom a Laczkovich-T.Sós vagy Leindler-féle analíziskönyvvel, esetleg néhány Cambridge-i elsőéves jegyzettel való konzultációt. A Newton-féle binomiális sorfejtés ($|x| < 1$-re konvergál) különösen szívük csücske:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

ahonnan jön például a tipikus $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ approximáció.

Amikor kontextus nélkül előjön egy $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor, feltételezzük, hogy elegendően kicsi x-ekre vizsgáljuk, hogy legyen értelme. A Taylor-sorfejtésnél jön át az az intuíció, hogy az $f(x+\delta x) \approx f(x) + f'(x)\delta x$ egy elsőrendű közelítés, amiből f', f'' stb. közelítéseivel n-edrendű közelítés is képezhető. Innen az $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + O(x^3)$ jelölés.

Végül: lehetséges $y = \sum a_n x^n$ sorokra *formálisan* is gondolni, tehát úgy, mint az $a_0, a_1, \ldots$ sorozat és egy hozzá tartozó algebrai kifejezés. Például ha így gondolkozunk, a $\sum a_n x^n$ és $\sum b_n x^n$ sorok szorzatát, $\sum c_n x^n$-et, definiálhatjuk a $c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell$ képlettel. Ebben a definícióban nem érdekelt minket, hogy mi történik, ha egy valós számot helyettesítünk x helyére.

5 Curve sketching

Nekem mindig bizonytalan volt, mit értenek az alatt, hogy "sketch a curve". Körülbelül csak az számít, hogy nagyjából stimmeljen a görbe iránya, alakja. Hogy művészi kezed közelebb jusson a helyes görbéhez, sokszor használnod kell olyanokat, hogy $f'(x) \geq 0$ esetén f monotonically increasing, $f'(x) = 0$-nál stationary point, $f''(x) \geq 0$ esetén convex, and the curve's convexity can only change at an inflection point ($f''(x) = 0$).

De hogy pontosan lásd, mit várnának, szerintem Siklos könyvében oldd meg vagy csak olvasd el Problem 14, 15, 20, 33, 50 megoldásait. Sokat fog segíteni.

[10]Be lehet látni azt is pl., hogy $(-R, R)$-ben az $x \mapsto \sum a_n x^n$ függvény folytonos és deriválható is tagonként: ez kőbaltával is kijön, de az $f_n \to f$ ha $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0$ fogalommal elegánsabb, de az már másodéves anyag. Abel-átrendezéssel jön ki, hogy R-ben is (féloldali) folytonos, ha értelmezett.

6 Integration

A Riemann-integrál fogalma egy összeg határértéke. (Az már csak alkalmazás, hogy pl. egy görbe alatti terület.) Például $\int_a^b f(x)dx$-re úgy érdemes gondolni, mint $\sum_{n=1}^N f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})$ határértéke, ahogy az $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ felosztást egyre jobban felszabdaljuk. Ahogy "a végtelenségig finomítjuk ezt a beosztást", egy nagy $\sum f(x)\cdot\delta x$ összeg látható: innen a jelölés.[11]

A Newton-Leibniz-tétel (angolul Fundamental Theorem of Calculus) elmondja, hogy az integrálás csak deriválás fordítva, mert $F' = f$ esetén

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Emiatt az integrálás a matematika egyik nagy (idegesítő) játszótere: a fordított deriváláshoz kb. tippelni kell. Mondjuk $\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$: ezt nem nehéz látni. De általában nem is tippeléstannal, hanem integrálási trükkökkel szoktunk dolgozni. Lássuk őket!

Integration by substitution. Emlékezzünk vissza arra, hogy minden függvényünk egy objektív t idő szerint van paraméterezve. Fussa be t mondjuk a $[0;1]$ intervallumot. Ez mit sem változtat az $x(t)$ integráljának "definícióján"[12]:

$$\int_{x(0)}^{x(1)} f(x)dx = \lim\sum_{n=1}^N f(x(t_n))\cdot(x(t_n) - x(t_{n-1})).$$

Lehetséges helyettesítést alkalmazni: legyen $y(t)$ egy másik függvény, ami, ha $x(t)$ minden értéket egyszer veszi fel, akkor megadható x függvényeképpen. Ekkor, "mivel a határértékek megegyeznek"[13],

$$\int_{x(0)}^{x(1)} f(y(x))\cdot\frac{dy}{dx}dx = \int_{y(0)}^{y(1)} f(y)dy.$$

Például, az $x = \cos u$ helyettesítéssel, mivel $\frac{dx}{du} = -\sin u$, így

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 u}dx\\ &= \int_{\pi/2}^0 \sin u\frac{dx}{du}du\\ &= \int_{\pi/2}^0 -\sin^2 udu,\end{aligned}$$

amit már könnyű $\frac{\pi}{4}$-ként meghatározni, vagy $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$ képlettel, vagy $\int_0^{2\pi}(\sin^2 u + \cos^2 u)du$-ból kiindulva[14].

További feladat: $\int \tan xdx = ?$.

Elég sok további kis trükk van:

[11] A precíz matematikai definíció: hogyha tekintjük az összes felosztásra értelmezett felső összegek infimumát és alsó összegek szuprémumát, és ezek megegyeznek, akkor ez a mennyiség az $\int_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál, ahol felső összegnek ill. alsó összegnek egy $\sum_{n=1}^N \sup_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x)\cdot(x_n - x_{n-1})$ ill. $\sum_{n=1}^N \inf_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x)\cdot(x_n - x_{n-1})$ alakú összeget nevezünk. Elég körülményes definíció, és pl. nem fáj hozzá belátni előbb, hogy bármely alsó összeg $\leq$ bármely felső összeg, de meglepően könnyű vele dolgozni.

[12] Ha létezik az integrál, akkor ez megadja az integrált, de a precíz definíció alsó és felső Riemann-összegekkel történik.

[13] Ez korántsem precíz okfejtés (kb. azt mondjuk benne: $y(t_n) - y(t_{n-1}) \approx \frac{dy}{dx}(t_n)\cdot(x(t_n) - x(t_{n-1}))$), de egyrészt azzá tehető, másrészt nagyon egyszerűvé tesz mindent.

[14] Ez utóbbi módszer elegánsabb és amúgy kapcsolódik a harmonikus rezgőmozgás energiájához, és azt jelenti, hogy $\sin^2$ vagy $\cos^2$ helyére $\frac{1}{2}$ írható periódushossznyi integrálban.

- integration by parts: mivel $(uv)' = u'v + uv'$, ezért $\int u'v = uv - \int uv'$, vagy ha jobban esik, $\int v du = uv - \int u dv$. Tipikus példa: $\int 1 \cdot \ln x dx$. Használd az $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ jelölést egészséggel!
- szimmetria kihasználása: például $u = \pi - x$ helyettesítéssel $\int_0^\pi \cos x dx = \int_\pi^0 (-\cos u)(-du)$ miatt az integrál 0.
- trigonometrikus vagy hiperbolikus függvény helyettesítése (például $\int \frac{dx}{1+x^2}$-ben $x = \tan u$, vagy $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$-ben $x = \cosh u$[15])

Siklos könyvéből az alábbi feladatot oldd meg (van benne improper integral):

Problem 9. Show, by means of change of variable or otherwise, that

$$\int_0^\infty f\left((x^2+1)^{1/2} + x\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1+t^{-2}) f(t) dt,$$

for any function f. Hence, or otherwise, show that

$$\int_0^\infty \left((x^2+1)^{1/2} + x\right)^{-3} dx = \frac{3}{8}.$$

Típuspélda még, hogy parciális integrálással integrálok sorozatát határozzák meg. Siklosban a Problem 22 ilyen; egy kellemes sorozat még a Wallis-integrálok sorozata, amikből a híres Stirling-formula levezethető.

Továbbá gyakran integrálással lehet becsléseket végezni. Például:

Feladat. Igazold, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \cdots = \ln 2,$$

hogyha bevetjük az $1 - \frac{1}{2} \pm \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ azonosságot, majd az $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx$ illetve $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx$ közé szorítunk.

Feladat. Igazold, hogy $|H_n - \log n|$ korlátos, ahol $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Feladat. Igazold, hogy

$$\left|\sum_{n=1}^\infty n^{-s} - \frac{1}{s-1}\right|$$

korlátos az $s \in (1; \infty)$ intervallumon.[16]

[15] A hiperbolikus függvényeknek csak algebrai tulajdonságaikat kell ismerni, ami nagyon egyszerű. Bevezetésért olvass tovább.

[16] Vagyis $\zeta(s)$ $\mathbb{C} \setminus \{\text{valami}\}$-re való analitikus kiterjesztésének egyszeres pólusa van az 1-ben.

7 Differential equations

Alkalmasint fizikában fel lehet írni egy egyenletet $y(x)$ függvényre $y, y', y'', \ldots$ és x kifejezései segítségével. Például:

$$y' = \lambda y \tag{1}$$
$$y'' = -k^2 y \tag{2}$$
$$y' = y + e^x \tag{3}$$
$$y' \tan x + y = 1 \tag{4}$$
$$y' = x^2(1 + y^2) \tag{5}$$
$$y' = (x - y)^2 \tag{6}$$
$$y' = (e^y - x)^{-1} \tag{7}$$

Ha interjúra készülsz, elég szerintem tudni (1) és (2) megoldásait, (1)-nek bizonyítását, és azt, hogy ha differenciálegyenletet látsz, próbálj alkalmas módon integrálni egyet. Kérlek, próbáld most megkeresni ezeknek az egyenleteknek a legáltalánosabb megoldásait.

(1) egyetlen megoldása $y = Ae^{\lambda x}$ (A konstans). Azért csak ez, mert $\frac{y'}{y} = \lambda$ esetén integrálva[17]:

$$\lambda x + C = \int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{dy/dx}{y} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln y.$$

Úgy általában, differenciálegyenletet úgy oldunk meg, hogy integrálunk egyet, esetleg közben egy ügyes helyettesítéssel (vagy tippelünk). [18]

Az $y'' = -k^2 y$ megoldása $y = C \sin(kx) + D \cos(kx)$[19], mert levezethető, hogy nincs másik ($y := y_1 z$ helyettesítés, ahol y_1 megoldás).

(3)-nál előbb kiszedjük az e^x-et egy $y = z + y_1$ helyettesítéssel: mivel $y_1 = e^x$ balgaságot ad (ún. rezonancia lép fel), helyette $y_1 = xe^x$-et alkalmazunk. Marad a $z' = z$ egyenlet, amit tudunk.

Nagy ötlet, hogy használhatjuk integráláshoz az $(uv)' = u'v + uv'$ szabályt. [20] Például $y' \sin x + y \cos x$ olyan alakú.

(5) megoldásához is integrálunk: $\int x^2 dx = \int \frac{dy/dx}{1+y^2} dx = \arctan(y) + C$.

Végül (6) megoldásához nyugodtan trükközhetünk a dx, dy jelöléssel[21]:

$$\begin{aligned} y' &= (e^y - x)^{-1} \\ dy(e^y - x) &= dx \\ e^y dy &= dx + xdy \\ e^y &= x'(y) + x \end{aligned}$$

és ez már olyan alakú, mint a (3)-as egyenlet.

[17] Azért nem írok abszolútértékjelet az ln-re, mert képzelhetünk minden függvényt $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvénynek; úgy is értelmes marad minden definíció. Márpedig így viselkedik a(z egyik) komplex logaritmus, amit $\mathbb{C} \setminus r$-en értelmezhetünk, ahol r tetszőleges, az origóból kiinduló félegyenes. De ez mindegy; ha zavar, rakd oda az abszolútértékjelet.

[18] Bár létezik olyan módszer is, hogy a differenciálegyenletből rekurzióval meghatározzuk y Taylor-sorfejtését, általában kellemetlen dekódolni y zárt alakját, és most a konvergencia kérdésével nem is foglalkoztunk.

[19] $= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

[20] Ez módszerré fejleszthető, lásd itt, de könnyebb úgy gondolkozni, ha az $(uv)' = u'v + uv'$ alakot akarjuk látni magunk előtt. Így oldható meg a (7)-es is.

[21] aki nagyon akarja, beláthatja, hogy mindez működik

8 Hiperbolikus függvények

Honnan jön, mire jó? (Ezt nem kell tudni.) A sin és cos függvények a φ ívmértékhez feleltetik meg az egységkör $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ pontját, azaz a $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ komplex számot.

Mivel a kör érintője merőleges a körre[22], ezért $\frac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi$. Más szóval $z' = iz$; ezt a differenciálegyenletet megoldva ($\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvények körében) $z = Ae^{i\varphi}$ adódik. With the initial condition $z(0) = 1$, we get $z = e^{i\varphi}$. Innen

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$
$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

(Tényleg elnézést kérek: ez az egész érvelés teljesen téves és precíz matematikai jelentése nincs. De legalább szép.)

Elég annyit hallani a hiperbolikus geometriáról, hogy benne (x_1, y_1) és (x_2, y_2) vektor skaláris szorzatát $x_1x_2+y_1y_2$ helyett $x_1x_2-y_1y_2$ adja meg, s így a "távolságnégyzet" x^2+y^2 helyett x^2-y^2.[23] Ez olyan, mintha az euklideszi geometria (x, y) vektorait lecserélnénk az (x, iy) vektorokra. A megfelelő szögfüggvények pedig a következők lesznek:

$$\sinh t = -i\sin(it) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$
$$\cosh t = \cos(it) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Amit kell tudni. A hiperbolikus függvények ugyanazért jók, mint a trigonometrikus függvények: szép összefüggéseket teljesítenek (amiknek max. időnként geometriai jelentése van), és így hasznos őket helyettesítésre használni. Nézd meg a Wikipédiát: ha van $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ vagy $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, mindenképp gondolj rájuk.

Also, note that $\cosh x = 289$ is quadratic in e^x. (This isn't so spectacular for cos, because e^{ix} is complex.)

9 Fizika

Azért jó STEP-en fizikát (mechanikát) csinálni, mert olcsó és kevesebbet kell benne gondolkozni. Például Siklos Problem 52 mutatja a fizikai stílust, érdemes megnézni, ha interjúra készülsz, akkor is. Ha bizonytalan vagy, mi kellhet, az OCR specification fizika moduljaiból M1, M2, M3, esetleg M4 modul ismeretei lehetnének interjún, de ezzel szerintem nem érdemes foglalkozni. Ha értesz fizikához, jó lesz.

Ha nem értesz fizikához, akkor pedig az alapdolgokat illik átnézni (M1, M2, kicsit M3), de akkor is mondhatod, hogy nem tanultál olyan fizikát. (Cserébe a Trinity interjú 10. feladatát nem fogod tudni megcsinálni, már ha arra jut időd.) Épp ezért van például Cambridge-ben elsőéves Mechanics kurzus: ha netán nem tanultál fizikát korábban, ott fel tudsz zárkózni.

A fizikában az a kellemes, hogy differenciálegyenleteket tudsz felírni és megoldani. Nézd meg: Siklos Problem 21.

10 Probability and Statistics

Csak STEP-hez kellhet. (Elemi valszámot pedig a magyar középiskola nagyjából elintézi.) Ha nagyon kajálnál már egyetemi cuccot, sasold meg az elsőéves Probability kurzus jegyzetét, amiből

[22] **Feladat.** Bizonyítsd be, hogy ha a $z(t) : [0; 1] \to \mathbb{C}$ görbe minden pontjában a helyvektor merőleges az érintőre, akkor $z(t)$ befut egy körívet. (Ezt most már alkalmazott matematikus módra meg tudod oldani.)

[23] További érdekességekért lásd ezt.

alaposan megtanulhatod azt az anyagot, ami előjöhet. De ha nincs kedved ezt megcsinálni, szerintem hagyjad a STEP valszámpéldáit (kivéve az egyiket, mert az gyakran igen egyszerű!): van bőven másik. Sokkal jobb a jól megszokott, tempós, svájci óra pontosságú munka.

11 Jó tanulást!